福井大学
工学部 研究報告
第44巻 第2号
1996年9月

巡回セールスマン問題の二つの近似解法の提案と実験

八田 邦彦* 長谷川 武光** 佐藤 義雄**

Approximate Solutions for the Traveling Salesman Problem

Kunihiko HATTA, Takemitsu HASEGAWA and Yoshio SATO

(Received Aug. 30, 1996)

We propose two methods for computing an approximate solution of the Traveling Salesman Problem, which is one of the well-known problems difficult to solve. One of the present two methods is a scheme using Voronoi diagram while another one is based on the combination of the method of divide and conquer and the genetic algorithm. Numerical results are included to illustrate the performance of our methods.

1 はじめに

巡回セールスマン問題は、幾つかの都市が与えられたときに全ての都市を一巡して出発した都市にもどってくる経路ハミルトン閉路の中で一番短い距離を求める問題である。一般に n 都市が与えられたときに $(n-1)!/2$ の組合せがあり、全ての場合を比較するのは現実的に不可能である。巡回セールスマン問題は、応用としてスケジューリング、配送などに実際に使われており、近似解を素早く、正確に求める必要がある。

近年の研究で、7397 都市の最適解 [1] が求められている。これは *branch and cut* というアルゴリズムで探索空間を狭めて行き解を求めているが、60 台ものワークステーションを駆逐して解の収束を調べて行なわれた。この様な過程を経て解を求めても実用的ではない。今までの研究で、物質を高温に熱し徐々に冷やして行くと安定なエネルギー準位の低い物質が出来ることをシュミュレートしたシュミュレーテッドアニーリング、人類の進化にともなう仮定の幾つかを模倣して作られた遺伝的アルゴリズム、ローカルに、全ての短くなる方法でパスをつなげかえる2本最適化法、3本最適化法、リンカーニハン法などのいくつかの近似解法を組み合わせることによって、精度をあげ成果を得ている [1]。本論文では

* 工学研究科情報工学専攻 ** 工学部情報工学科

さらに都市の勢力圏の情報(ボロノイ図)を導入することによって近似解を得る方法、および遺伝的アルゴリズム [4, 5] に分割統治法 [6] を使って探索空間を狭める方法を提案する。

2 NP 完全問題

巡回セールスマン問題の困難さについて述べるために次の二つの集合に問題を分ける。

- P: 決定性アルゴリズム (deterministic algorithm) によって多項式時間で解かれる問題の集合。
- NP: 非決定性アルゴリズムによって、多項式時間で解かれる問題の集合。

NP に属していることが分かっているが、 P に属しているかどうか分からない問題、すなわち、非決定性機械ならば容易にとけるが、普通の決定性機械の上で動く効率のよいアルゴリズムが見つかっていない、あるいはそれがないことが証明されていない問題の集合を考える。これらの問題は、その中の一つが決定性機械において多項式時間で解ければ、 NP の全ての問題が $P=NP$ という性質を持つ。よって、これらの問題のどの一つに対しても効率のよいアルゴリズムが見つけられなかったということは、 $P=NP$ の証明がないことを意味し、 $P \neq NP$ である。このような問題が NP 完全問題である。よって、巡回セールスマン問題は、組合せ最適化問題で NP に属し、決定性アルゴリズムが存在しない。すなわち場合のすべての組合せを調べるしか厳密解を求められない。このことから、巡回セールスマン問題は NP 完全問題である。

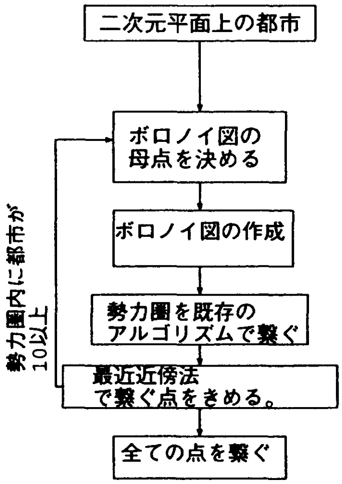

図 1: ボロノイ図を用いたアルゴリズムのフローチャート

3 方法 1— ボロノイ図による方法

ボロノイ図は勢力範囲を調べるのに使われる。例えば、日本国内の全ての学生を一番距離が近い学校に行かせるための学区割問題を考える。そのとき、母点として学校の位置を適用してボロノイ図を計算する。結果、母点 (学校) に対応するボロノイ領域が一つの学区を示す。この様な性質を持つボロノイ領域の情報を巡回セールスマン問題の探索空間を狭めるために導入する。

3.1 ボロノイ図を用いたアルゴリズム

まず探索領域を分割していくことによって勢力範囲の中心となる都市を決める。この分割は探索空間を 1/2、 1/3 にすることによって密、疎を調べ、ある一定の都市の数がかたまっていたら、その中心の都市を決める。大域的な都市の 10 の勢力圏分割をボロノイ図を使うことによって、動的に行なう。ボロ

ノイ図の母点には先程の中心の都市を使う。その数個の勢力圏で既存のアルゴリズムを使うことによって最適解を求める。この操作を勢力範囲内に 10 都市になるまで繰り返し、最終的に再帰的に近似解を出す。図 1にフローチャートを示す。

3.2 ボロノイ図

d 次元ユークリッド空間を E^d で表す。空間 E^d 内に特に指定された n 個の点の集合を $S = \{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ とする。2 点 P, Q のユークリッド距離を $l(P, Q)$ とする。

$$R(S; P_i) = \{P \exists E^d \mid l(P, P_i) < l(P, P_j), \forall j \neq i\} \tag{1}$$

P_i が支配する勢力圏が $R(S; P_i)$ である。空間 E^d は $R(S; P_1), R(S; P_2), \cdots, R(S; P_n)$ とそれらの境界に分割される。この分割を S に対するボロノイ図という。図 2にボロノイ図の例である。

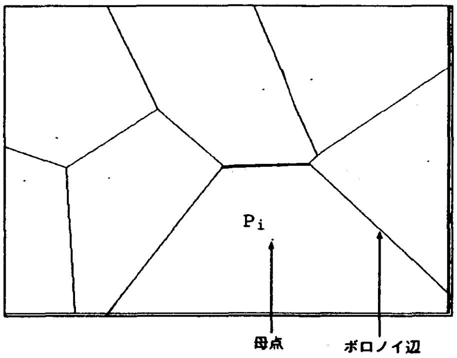

図 2: ボロノイ図

3.3 ボロノイ図の実装

巡回セールスマン問題における都市座標で二次元のボロノイ図を求める。平面走査技法 (plane-sweep technique)[7] を使った。この方法は直線をつかって平面を下から上へ走査し, 直線で切った時の切り口を維持更新するということを行なう。走査線より下の部分は完成している状態を保持する。S を R^2 における n 個の母点の集合とし、$V(S)$ をそれに対するボロノイ図とする。このとき捜査線より下にボロノイ領域のの一部分があっても、対応する母点 $p \in S$ が走査線より上にあることがある。このことを考慮にいれて、平面走査技法に対応させるために次のような変換を $V(S)$ に対して行なう。

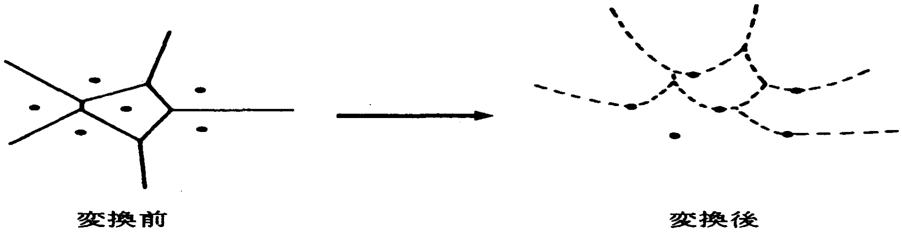

図 3: ボロノイ図の変換

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow x* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \delta(x, p) \end{pmatrix} \tag{2}$$

この変換をほどこした V を $V*$ とする。このボロノイ図の変換を図3に示す。図3の右側の変形した後の図を見れば分かるように、領域の最も下の点がその領域を定義している母点自身になる。よって母点 p の領域が走査線と交わるのは、走査線が母点 p を通過した時といえることができる。

そこでこの平面走査技法は $V*(S)$ を構成して式(2)の計算を逆に行なう。初期状態では、走査線は S より下にあり、$V*(S)$ のうち走査線より下にある部分には変形された辺は存在しない。よって最初の走査線による切断構造はない。走査線が上へ向かって移動するにしたがって切断構造を更新する。走査線が母点を通過するときに新しい領域が作られ、走査線が辺の交点である頂点を通過するとボロノイ辺がつくられる。

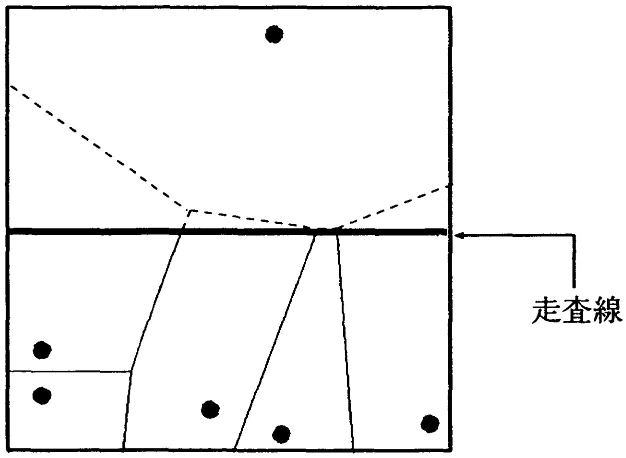

図 4: 平面走査技法

3.4 平面走査技法の評価

まずはじめに n 個の母点の集合 S に対するボロノイ図のボロノイ点の数 v を考慮する。ここでボロノイ辺の数を e とする。平面は n 個の面に分けられるので、平面状の連結な図形のオイラーの公式

$$(\text{点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 2 \tag{3}$$

より

$$(v+1) - e + n = 2 \tag{4}$$

ここでボロノイ辺は2つのボロノイ点に接続し、ボロノイ点は3つのボロノイ辺に接続する。

$$2e \geq 3v \tag{5}$$

(4)に(5)を代入して e を消去すると

$$v \leq 2n - 2 \tag{6}$$

よって n 個の母点に対するボロノイ点の数は $2n-2$ 個以下である。

平面走査技法で切断構造に影響を与える点も $2n{-}2$ 個である。このデータ構造の1回の更新は $O(\log n)$ である。これを繰り返すのだから、$V*(S)$ を計算する時間は $O(n \log n)$ である。$V*(S)$ から $V(S)$ への変換は $O(n)$ でできる。

3.5 既存のアルゴリズムの利用

勢力圏で分かれた都市に対して既存のアルゴリズムを適用する。勢力圏で分ける都市は 10 都市である。この都市に対しての最短路は今までの研究で分岐限定法をつかって 1 秒以内で求まる。しかし現段階において分岐限定法のプログラムを、実装は二本最適化法を用いている。これにより解の精度は悪くなっているが、計算時間は短縮している。二本最適化法と最近近傍法のアルゴリズムについて述べる。

- 二本最適化法: ユークリッド幾何学に従うケース。 もし経路が交差していれば簡単に短くなる。すなわち、交差している二つのエッジを消し、可能な交差していないエッジによって二つのパスを結果として再びつなぐ。図 5に日本最適化法の例を示す。この方法は、計算アルゴリズムから n 都市では $O(n^2)$ 時間が掛かる。

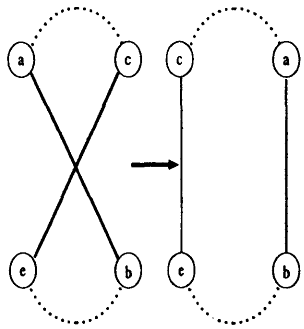

図 5: 2 本最適化の例
都市 a,b を繋ぐ経路と都市 c,e を繋ぐ経路が交差している場合

- 最近近傍法: 勢力範囲を計算したあとの処理に適用する。隣接する領域同士を繋ぐパスを決定する。互いに隣接する領域の中で最も近い都市を結ぶことによって領域を関連づける。

4 方法 1 の実験結果

方法 1 で実験した結果、アメリカ 532 都市を巡る問題では総距離が厳密解の 2 倍だった。3000 都市クラスの問題でも総距離が厳密解の 2 倍という結果だった。計算速度では、SONY-NEWS 5000 上で 99 都市問題で 0.2 秒、532 都市問題で 1.4 秒である。この問題に対して Padberg と Rinaldi[1] が 1987 年にスーパーコンピューター CYBER-205 を用いて 6 時間計算した結果、最適解を算出した。このことから本方法は計算量を減らしていることが分かる。精度の悪さは、既存のアルゴリズムで使った 2 本最適化法の誤差の蓄積のせいである。図 6に都市数と計算時間のグラフをのせる。

5 方法 2— 分割統治法 + 遺伝的アルゴリズム

一般に、遺伝的アルゴリズムは最適解の周辺には早く近づくが、局所探索能力が弱いという問題がある。この問題を解決するために分割統治法と遺伝的アルゴリズムを組み合わせる。大域的探索を遺伝的アルゴリズムで行ない、局所的探索を分割統治法で行なう。すなわち遺伝的アルゴリズムの苦手な解の近傍から最適解への山登りを分割統治法が行なうのである。遺伝的アルゴリズムのみで探索を行う場合は、探索空間が非常に広く連続的なので、最適解を見つけることは困難である。これに対して、局所探索によって得られた局所解の集合に対して遺伝的操作を行う。よって、遺伝的アルゴリズムの探索空間は有限個の局所解となり、その中から最適解を見つけ出すのは困難ではなくなる。この方法は、分割統

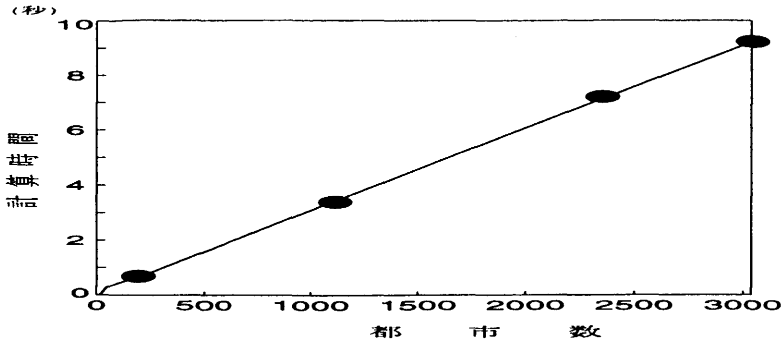

図 6: 方法 1 を用いた都市数と時間の関係

治法のアルゴリズムを幾つかの個体に対して実行させ、この結果を遺伝的アルゴリズムが評価する物である。図 7は、遺伝的アルゴリズムのみから分割統治法を局所探索に適用して離散化される様子を表している。

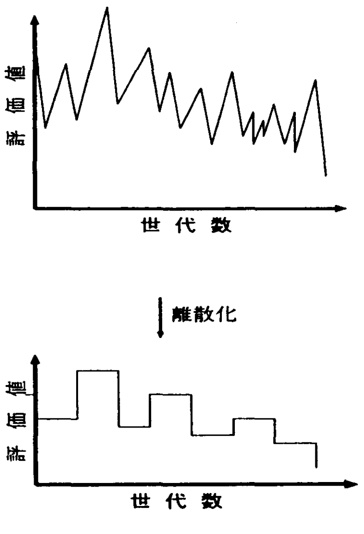

図 7: 分割統治法＋遺伝的アルゴリズム

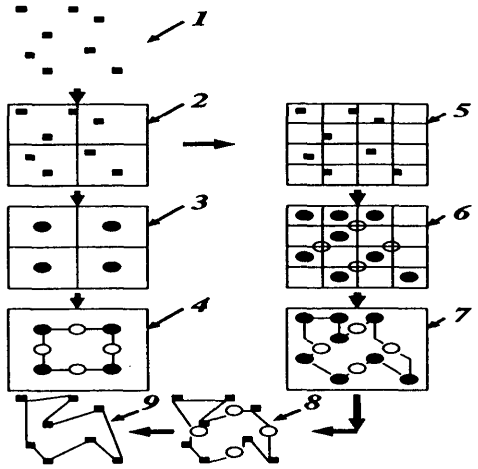

図 8: 分割統治法

5.1　分割統治法のアルゴリズム

分割統治法 [6] は、まず全体的な構造をおさえて、次に少し細かい構造の分析に移り、構造の分析を順々に細かくしていき、最終的に全部の点を巡る短い経路が見つかるようになっている。実装は四つの枝がある tree を用いて行なった。次に分割統治法の操作を図 8 について説明する。

- 分割

  ポインタは、各セルそのものを指し、分割した時点で基本データと照らし合わせ、経路の情報を持つ。分割の終了条件は、セルの中に都市が一つになるまでする。(図 8 の *1*〜 *7*)

- 結合
  各セルのポインタをたどり端点の情報からすべての都市と端点を繋ぐ経路を計算する。(図 8 の *8*)
- 端点削除
  最初に与えた都市の情報と違う座標の点が合ったら削除する。近似解を表示する。(図 8 の *9*)

5.2 遺伝的アルゴリズム

遺伝アルゴリズム [4, 5] は、自然進化に見られる過程のいくつかを模倣して構築されたアルゴリズムである。遺伝的アルゴリズムの操作について述べる。

(1) 染色体の集団を初期化する。
乱数を使って染色体を 200 個体用意する。

(2) 集団の各染色体を評価する。
適合度の差を淘汰圧に直接反映させるためにウインドウ技法をもちいる。ウインドウ技法は

- 最低評価値をみつける。
- 各染色体に、この評価値からの差に等しい適応度を与える。

という操作を行なう。

(3) 現在の染色体を交配させて新しい染色体を生成する。親の染色体を交配させる際に突然変異と再生を適用する。
選択のアルゴリズムは遺伝的アルゴリズムの規則 (適合度の大きいもの程たくさん子どもを生むようにする) に準じるルーレット戦略を用いる。この方法は適合度に比例した割合で選択する方法である。これは適合度に比例した領域を持つルーレットを回し、ルーレットの玉が入った領域の個体を選び出す。

[1] 集団の全ての個体の適応度を合計する。この結果を全体適応度とする。
[2] 0 から全体適応度までの間のある乱数 n を生成する。
[3] 集団の先行する個体の適応度に個体の適応度を加えていき、n 以上の値に達した時、そのときの個体を親として返す。

交叉オペレータは、1 点交叉、2 点交叉、一様交叉がある。1 点交叉は生物学的プロセスにヒントを得た物である。これはアルゴリズムして見た場合に問題点がある。最も重要な点は、染色体上にコード化された特徴の特定の組合せは一点交叉では生成できないことである。例として表 1の二つの染色体があるとする。表 1の中で強調してあるビットは高いパフォーマンスを与える。一点交叉では、これら二つのスキーマを一つの染色体上に結合させることが出来ない。なぜならば第一のスキーマは第一の染色体の両端に同じ値のビットを有するからである。よっていかなる交叉のポイントを選択しても、第一のスキーマは必ず壊されて伝達されなくなる。

表 1: 一点交叉によって結合できない二つのスキーマ

染色体 1	**1**	1	**0**	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	**1**
染色体 2	0	0	0	1	**0**	1	1	0	**1**	1	1	1	0	0

これを解決するために一様交叉を本研究では用いた。これは、任意のビット位置の対が同一であるスキーマを含むあらゆるスキーマの集合に対しても、それらを結合することができる。このア

ルゴリズムでは二つの親が選ばれ、そして二つの子が生成される。子の生成は二つの子の各ビット位置に対して、どちらの親がそのビット値をどちらの子に与えるかを、ランダムに決定することにより行われる。突然変異は遺伝子を一定の確率で変化させる操作である。突然変異は、あまり大きな変異確率に設定するとスキーマがことごとく破壊されるため、乱数的なサーチとなる。しかし突然変異がない場合は、初期の遺伝子の組合せ以外の空間を探索することは出来ず、したがって解が局所解に陥る。

(4) 新たな染色体の入る場所を空けるために集団の一部を削除する。

(5) 新たな染色体を評価し、集団に挿入する。

(6) 決められた時間が経過したら、停止して最良の染色体を返す。そうでなければ (3) へ戻る。

5.3 分割統治法十遺伝的アルゴリズムの実装

本研究では各世代に 200 個体用意し、親の選択にルーレット戦略、交叉のアルゴリズムに一様交叉、スケーリング技法にウインドウ技法を適用して、局所探索のために探索空間が狭まれないように各世代の 10 個体に分割統治法を行なった。

6 分割統治法 + 遺伝的アルゴリズムの結果

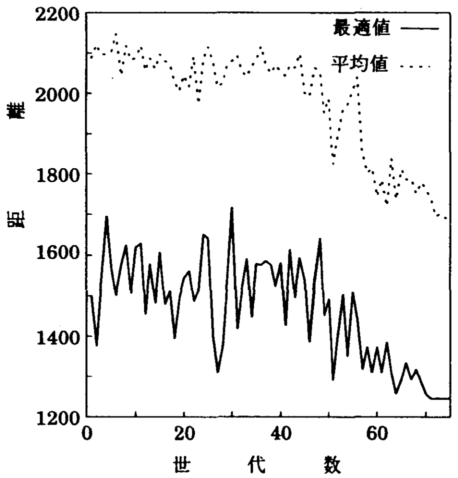

図 9: 遺伝的アルゴリズムのみ

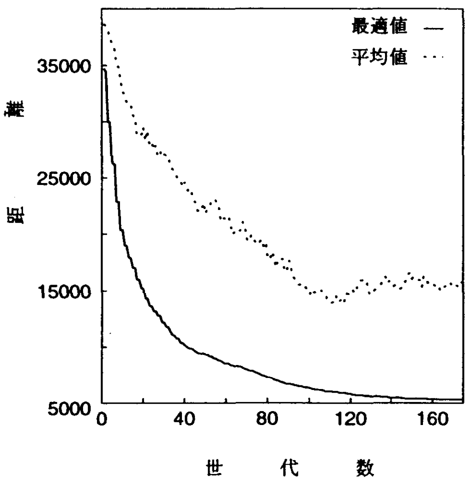

図 10: 分割統治法 + 遺伝的アルゴリズム

150 都市が求まるまでの推移を図 10 に表す。参考のために遺伝的アルゴリズムのみで一様乱数の 10 都市に適用した結果を図 9 に示した。ここに示したように、遺伝的アルゴリズム単体のみだと収束性に問題があるが、分割統治を併用することにより急速に収束し解がえられる。次に既存の st70 都市問題 [1] に適用して他のアルゴリズムと比較した結果を次の図 11 に示す。

7 結論

巡回セールスマン問題を解くために二つの方法を提案した。ボロノイ図を用いる方法は現段階において、勢力圏で分かれた都市に対して二本最適化法を用いているので精度は悪いが、図 6 より都市数に比例した計算時間でできる。

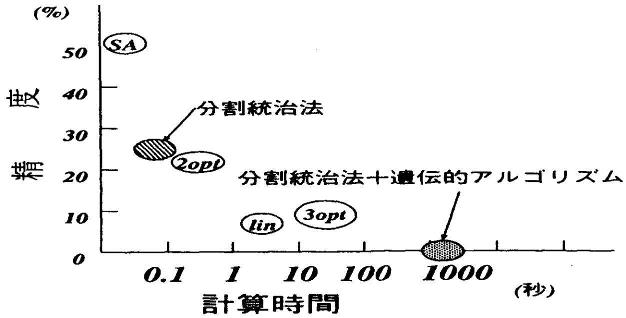

図 11: st70 都市問題の計算時間と精度
SA はシュミュレーテッドアニーリング、*2opt* は二本最適化法、
lin はリン = カーニハン法、*3opt* は三本最適化法の結果である。
SONY- NEWS5000 を使用した。

分割統治法は単体で適用すると 30% の精度だが高速である。この性質を利用して、分割統治法 + 遺伝的アルゴリズムでは、遺伝的アルゴリズムの局所探索として適用することによって、精度を上げることができ、st70 問題 [1] では厳密解が求められた。

ここで述べた二つの方法をさらに改良するための今後の展望として、次のことが上げられる。

- ボロノイ図を適用する方法
  - 勢力圏の巡回路を得るための操作を厳密解を与える分岐限定法で行なう。
  - ボロノイ図の母点の与え方の最適な規則の情報をアルゴリズムに加える。
- 分割統治法 + 遺伝的アルゴリズム
  遺伝的アルゴリズムの交叉オペレータに実際の自然進化にともなう方法を考慮する。

参考文献

[1] Gerhard Reinelt: *The Traveling Salesman,* Springer-Verlag (1991).

[2] 伊庭斉志: 遺伝的アルゴリズムの基礎, オーム社 (1994).

[3] 上坂吉則, 尾関和彦: パターン認識と学習のアルゴリズム, 文一総合出版 (1990)

[4] 嘉数由紀昇, 三上偵芳, 川上敬, 高取則彦, 鈴木恵二: 遺伝アルゴリズムハンドブック, 森北出版 (1981).

[5] 北野宏明: 遺伝的アルゴリズム, 産業図書 (1993).

[6] 宇佐見義之: 巡回セールスマン問題の高速近似解, *Computer Today* (1994),9,*No* 63.

[7] 杉原厚吉: Voronoi 図 — 一つの基本的な幾何データに関する概論, 「bit」 1993 年 9 月号別冊、コンピュータ サイエンス, 共立出版 (1993) pp.131-185.

[8] Usami Yosiyuki, Kano Yoshiki: New Method of Solving the Traveling Salesman Problem Based on Real Space Renormalization Theory, *Phys. Rev. Lett.*, 75 (1995) pp.1683-1686.